Corrigé Maths II, TSI (2006) : *Concours marocain*

4 juillet 2008

EXERCICE

1) Evident car $A^3+A=0$

2) a) u injectif donc bijectif car endomorphisme en dimension finie, donc A inversible, en multipliant l'égalité $A^3+A=0$ par A^{-1}, on en déduit que $A^2=-I_3$, d'où $u^2=-id_E$. Donc $\det(u^2)=\det(-id_E)$, d'où $\det(u)^2=-1$, impossible car $\det u\in\mathbb{R}$.

b) u n'est pas injective, donc $0\neq\ker u\subset\mathbb{R}^3$, d'où $\dim\ker u\in\{1,2\}$.

3) $x\in\ker u\cap\ker(u^2+id_E)\Longrightarrow u(x)=u^2(x)+x=0\Longrightarrow x=0$. D'autre part $\forall x\in E$, on a : $u^3(x)+u(x)=0$, donc $x+u(x)\in\ker u$ et $-u(x)\in\ker(u^2+id_E)$, avec $x=x+u(x)-u(x)$, d'où $E=\ker u\oplus\ker(u^2+id_E)$. On a $\dim E=3, \dim\ker u\in\{1,2\}$, d'où $\ker(u^2+id_E)\in\{1,2\}$.

4) a) $x\in F=\ker(u^2+id_E)\Longrightarrow u^2(x)=-x\Longrightarrow(u^2+id_E)u(x)=u^3(x)+u(x)=u(u^2(x)+x)=u(0)=0\Longrightarrow u(x)\in\ker(u^2+id_E)=F$, d'où F est stable par u.

b) $\forall x\in F=\ker(u^2+id_E)$ on a $v^2(x)=u^2(x)=-x$, donc $v^2=-id_F$.

c) Posons $r=\dim F$, donc $\det v^2=(-1)^r$, or $\det(v^2)=(\det v)^2\geq 0$, d'où r pair avec $r\in\{1,2\}$, donc $r=2$.

d) Supposons que v admet une valeur propore réelle, λ, donc $\exists x\neq 0$ tel que $v(x)=\lambda x$, d'où $v^2(x)=\lambda^2x=-x$, d'où $\lambda^2=-1$, impossible.

5) a) $\operatorname{card}\{e'_2,e'_3\}=2=\dim F$, il suffit de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que $\alpha e'_2+\beta e'_3=0$, or $e'_3=u(u'_2)$, donc $\alpha u(e'_2)+\beta u^2(e'_3)=0$, donc $\alpha e'_3-\beta e'_3=0$, car $u=v$ sur F et $v^2=-id_F$, ainsi $\alpha=\beta$, d'où $\alpha(e'_2+u(e'_2))=0$, d'autre part $u(e'_2)\neq -e'_2$ car $u=v$ sur F n'admet pas de valeurs propres, donc $\alpha=\beta=0$.

b) $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ base de E, car $E=\ker u\oplus F$. De plus $u(e'_1)=0, u(e'_2)=e'_3, u(e'_3)=u^2(e'_2)=-e'_2$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

c) A et B semblables car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

PROBLÈME

Première Partie

1) a) $p\circ p(x)=p((u|x)u)=(u|x)p(u)=(u|x)(u|u)u=p(x)$ car $(u|u)=\|u\|^2=1$.

b) $x\in\ker p\Longleftrightarrow p(x)=(x|u)u=0\Longleftrightarrow(x|u)=0($ car $u\neq 0\Longleftrightarrow x\in u^{\perp}$.
$x\in\operatorname{Im}p\Longleftrightarrow p(x)=x$ (car p projecteur) $\Longleftrightarrow x=\lambda u$ où $\lambda=(x|u))\Longleftrightarrow x\in\operatorname{Vect}(u)$. Donc p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u)$.

c) $(p(x)|y)=(x|u)(u|y)=(x|p(y))$ donc p est symétrique et $(p(x)|x)=(u|x)^2$, donc p est positif.

d) p est un projecteur orthogonale, ses seuls valeurs propres sont 0 et 1, donc les sous-espaces propres associés sont $\ker p = \text{Vect}(u)^\perp$ et $\text{Im}p = \text{Vect}(u)$ qui forment une somme directe dans E, donc p est diagonalisable.

2) a) Tout calcul fait les coefficients de la matrice U^tU sont les u_iu_j.

b) Les coefficients de la matrice de p dans la b.o.n $\mathcal{B}_E$ sont donnés par la formule $a_{i,j} = (p(e_i)|e_j)$ or $p(e_i) = (e_i|u)u = u_iu$, d'où $a_{i,j} = u_i(u|e_j) = u_iu_j$, coefficient de U^tU. Donc la matrice de p dans la b.o.n n'est autre que U^tU.

3) a) Pour $\alpha = 0$, $f_\alpha = id_E$ est un automorphisme. Pour $\alpha \neq 0$, $\det(f_\alpha) = \det(id_E + \alpha p) = \alpha^n \det(p + \frac{id_E}{\alpha}) \neq 0 \iff -\dfrac{1}{\alpha}$ n'est pas valeur propre de $p \iff -\dfrac{1}{\alpha} \neq 1$, donc f_α automorphisme *si et seulement si* $\alpha \neq -1$.

b) $G \subset Aut(E)$ qui est un groupe pour la loi $\circ$, il suffit donc de montrer que c'est un sous-groupe. D'abord $id_E \in G$ pour $\alpha = 0$, d'autre part $f_\alpha \circ f_\beta = (id_E + \alpha p).(id_E + \beta p) = id_E + (\alpha + \beta + \alpha.\beta)p \in G$. Enfin $f_\alpha \circ f_\beta = id_E$ pour β tel que $\alpha + \beta + \alpha.\beta = 0$, i.e., $(f_\alpha)^{-1} = f_\beta \in G$ où $\beta = -\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

c) $f \in G \cap O(E) \iff f = f_\alpha$ tel que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 \ \forall x \in E$. or $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x + \alpha p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|p(x)) + \alpha^2\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2(x|u)^2$, donc $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \alpha(x|u)^2(2+\alpha) = 0,\ \forall x \in E \iff \alpha \in \{0, -2\}$ ou bien $(x|u) = 0\ \forall x \in E$, i.e., $u = 0$ (impossible). Donc $G \cap O(E) = \{f_0 = id_E, f_{-2} = id_E - 2p\}$, donc $\dfrac{-f_{-2} + id_E}{2} = p$, d'où $-f_{-2}$ est la symetrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)$, et donc f_{-2} est la symetrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)^\perp$.

4) a) p étant diagonalisable, sa matrice est donc de la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale formée par des -1 et des 1. La matrice de $f_\alpha = id_E + \alpha p$ est donc de la forme $I_n + \alpha PDP^{-1} = P(I_n + \alpha D)P^{-1}$ où $I_n + \alpha D$ est une matrice diagonale formée par des $1+\alpha$ et des $1-\alpha$ qui sont donc les valeurs propres possible de f_α. Le sous espace propre associé à $1+\alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1+\alpha)id_E) = \ker(\alpha(p - id_E)) = \ker(p - id_E) = \text{Im}p = \text{Vect}(u)$. Le sous espace propre associé à $1-\alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1-\alpha)id_E) = \ker((\alpha+1)p) = \ker p = \text{Vect}(u)^\perp$. En particulier $P_p(\lambda) = (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - 1)$.

b) $P_{f_\alpha}(\lambda) = \det(f_\alpha - \lambda id_E) = \det(\alpha p - (\lambda - 1)id_E) = \alpha^n \det(p - \frac{\lambda-1}{\alpha}id_E) = \alpha^n P_p(\frac{\lambda-1}{\alpha}) = \alpha^n(-1)^n \left(\frac{\lambda-1}{\alpha}\right)^{n-1}(\frac{\lambda-1}{\alpha} - 1) = (-1)^n(\lambda-1)^{n-1}(\lambda - 1 - \alpha)$.

c) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a déjà vu que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2(x|u)^2 \leq 1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1+\alpha)^2$, car $(u|x) \leq \|u\|\|x\| = 1$, donc $\|f_\alpha\| \leq |1+\alpha|$. D'autre part $\|f_\alpha\| \geq \|f_\alpha(u)\| = |1+\alpha|$. D'où égalité.

5) a) Soit U la colonne formée par des $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $J_n = nU^tU$, soit V une autre colonne telle que $J_n = nV^tV$, d'où $U^tU = V^tV$. Or ${}^tUU = 1$, de même que pour V (simple calcul), donc $U^tUV = V^tVU$, i.e., $V = \lambda U$ or $\|U\| = \|V\| = 1$, d'où $V = \pm U$.

b) $aI_n + bJ_n = a(I_n + \frac{nb}{a}U^tU)$, or U^tU n'est autre que la projection orthogonale sur u de coordonnées U, donc $g = af_{\frac{nb}{a}}$. Les valeurs propres de $f_{\frac{nb}{a}}$ sont $1 + \frac{nb}{a}$ et $1 - \frac{nb}{a}$, celles de $g = af_{\frac{nb}{a}}$ sont donc $a + nb$ et $a - nb$. Le polynôme caractéristique de g est $P_g(\lambda) = \det(af_{\frac{nb}{a}} - \lambda id_E) = a^n \det(f_{\frac{nb}{a}} - \frac{\lambda}{a}id_E) = a^n P_{f_{\frac{nb}{a}}}\left(\frac{\lambda}{a}\right) = a^n(-1)^n(\frac{\lambda}{a} - 1)^{n-1}(\frac{\lambda}{a} - 1 - \frac{nb}{a}) = (-1)^n(\lambda - a)^{n-1}(\lambda - a - nb)$. les sous-espaces propres associés sont les ceux de f_α, c'est à dire $\text{Vect}u$ et $(\text{Vect}u)^\perp$.

Deuxième Partie

1) a) Car h est diagonalisable dans une b.o.n, puisque symétrique.

b) Supposons que h est positif, et soit λ une valeur propre de h de vecteur propre associé x, donc $h(x) = \lambda x$ et $(h(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda\|x\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$. Inversement supposons que toutes les valeurs propres λ_i de h soient positives, et soit $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la base de h dans une b.o.n formée de vecteurs propres. Soit $x \in E$ et $X = (x_i)$ la colonne formé par les coordonées de x dans cette même b.o.n, alors $(h(x)|x) =^t XDX = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^2 \geq 0$, donc h est positif.

2) a) La linéarité de $\tilde{f}$ découle de celle à droite du produit scalaire.

$$\forall x \in E, \forall 1 \leq j \leq m, \text{ on a : } \begin{aligned} < \tilde{f}(x), e'_j >= & < \sum_{k=1}^{m} (f(e'_k)|x)e'_k, e'_j > \\ & = \sum_{k=1}^{m} (f(e'_k)|x) \underbrace{< e'_k, e'_j >}_{\text{null si } k \neq j} \\ & = (f(e'_j)|x) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vérifiée sur les éléments de la base (e'_j), donc vérifiée par linéarité pour tout élément $y \in F$.

Unicité : Soit $\tilde{f}_1$ une autre application linéaire vérifiant la même propriété que $\tilde{f}$, donc $< \tilde{f}(x), y >=< \tilde{f}_1(x), y > \ \forall y \in E$, d'où $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}(x), \ \forall x \in E$.

b) $< \tilde{f} \circ f(x), y >=< f(x), f(y) >=< f(y), f(x) >=< \tilde{f} \circ f(y), x >=< x, \tilde{f} \circ f(y) >$, donc $\tilde{f} \circ f$ est symétrique, d'autre part $< \tilde{f} \circ f(x), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2 \geq 0$, donc $\tilde{f} \circ f$ est positif.

c)
$$\begin{aligned} x \in \ker \tilde{f} \iff \tilde{f}(x) = 0 \iff & < \tilde{f}(x), y >= 0, \ \forall y \in F \\ \iff & (x|f(y)) = 0, \ \forall y \in F \\ \iff & (x|z) = 0, \ \forall z \in \ \mathrm{Im} f \\ \iff & x \in (\ \mathrm{Im} f)^{\perp} \end{aligned}$$

Donc $\ker \tilde{f} = (\ \mathrm{Im} f)^{\perp}$. D'autre part, il est clair que $\ker f \subset \ker(\tilde{f} \circ f)$, inversement :

$$\begin{aligned} x \in \ker \tilde{f} \circ f \implies & \tilde{f} \circ f(x) = 0 \\ \implies & < \tilde{f} \circ f(x), x >= 0 \\ \implies & < f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2 = 0 \\ \implies & f(x) = 0 \\ \implies & x \in \ker f \end{aligned}$$

D'où l'autre inclusion.

d) $\mathrm{rg}(\tilde{f} \circ f) = \mathrm{rg} f$ découle du fait que $\ker f = \ker(\tilde{f} \circ f)$, $rg(f) \leq \min(n, m)$ découle du fait que $f : F \longrightarrow E$ est linéaire, avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$.

e) Les coéfficients $a_{i,j}$ de la matrice sont donnés par la formule suivante : $a_{i,j} =< f(e'_j), e_i >$

i. Les coéfficients $\tilde{a}_{i,j}$ sont donnés par la formule : $\tilde{a}_{i,j} = (\tilde{f}(e_j)|e'_i) =< e'_j, f(e_i) >= a_{j,i}$. Donc la matrice associèe à $\tilde{f}$ n'est autre que ${}^tA$.

ii. La matrice associèe à $\tilde{f} \circ f$ est donc ${}^tA.A$.

3) a) Avec la notation $f(e'_k) = u_k$, on a $\forall x \in E,\ \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)e'_k$, donc

$$f \circ \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)f(e'_k) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|x)u_k = \sum_{k=1}^{m} p_k(x), \text{ d'où } f \circ \tilde{f} = \sum_{k=1}^{m} p_k.$$

b) $f \circ \tilde{f}$ est symétrique, en tant que somme d'endomrphisme symétriques. D'autre part $\forall x \in E$, on a : $(f \circ \tilde{f}(x)|x) =< \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) >= \|\tilde{f}(x)\|^2 \geq 0$, donc $f \circ \tilde{f}$ est positif.

c) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ \tilde{f}$, donc $\exists x \neq 0$ tel que $f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x$, en composant à gauche part $\tilde{f}$, on trouve $\tilde{f} \circ f(y) = \lambda y$ où $y = \tilde{f}(x) \neq 0$, car sinon $y = \tilde{f}(x) = 0 \Longrightarrow f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x = 0$. Pareil pour la réciproque.

d) On a $f \circ \tilde{f}(e'_j) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)f(e'_k) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)u_k$, or les coéfficients de la matrice G sont donnés par la formule $(f \circ \tilde{f}(e'_j)|e'_i) = \sum_{k=1}^{m}(u_k|e'_j)(u_k|e'_i)$, ainsi de $G = B^tB$ où B est la matrice de cofficients $(u_i|e'_j)$ c-à-d dont les colonnes sont exactement les u_k, et on a déjà vu dans la question II,2,d que $G = {}^tAA$.

e) $\mathrm{rg}G = \mathrm{rg}f$ est déjà traité dans la question II,2,d. 0 est une valeur propre de $\tilde{f} \circ f \Longleftrightarrow \det G = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rg}G = \mathrm{rg}B \neq m$, i.e., les colonnes $(u_1, \ldots, u_m)$ sont liés.

4) a) Les coéfficients de la matrice B sont donnés par la formule du cours : $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}a_{k,j}}_{\text{null si } i>k \text{ ou } j>k} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 = \min(i,j)$, donc $B = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$

b) Prendre ${}^tu_1 = (1, 0, \ldots, 0), {}^tu_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_m = (1, \ldots, 1)$.

c) 0 ne peut pas être une valeur propre de G, car la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est libre, puisque elle forme la matrice inversible U tel que $U^tU = B$ où ${}^tU = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fin.